5. Séries trigonométriques de Fourier

Exercice 1. Montrer que les fonctions

$$f_m : x \in [a,b] \mapsto \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2i\pi m x}{b-a}} \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

constituent une suite orthonormée dans l'espace $\mathrm{L}^2([a,b])$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

Exercice 2. (a) Développer en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$ la fonction f donnée par $f(x) = e^x$.

(b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m^2+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2+1}.$$

Exercice 3. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de f dans $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$.

(b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}, \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Exercice 4. Développer en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-1, 0])$ la fonction f définie par $f(x) = \sin^2(\pi x)$.

Exercice 5. Soit f la fonction d'une variable réelle définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

(a) Si possible, développer f en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$.

(b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4}.$$

F. Bastin et L. Demeulenaere – 7 novembre 2017